

DOI: 10.7652/xjtuxb201712023

单液膜气泡聚并和连接过程的 移动粒子半隐式法数值模拟

倪妮, 孙中国, 陈啸, 席光

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为了研究单液膜气泡单层液膜包裹气体的特殊结构形式和内外壁面均受气液表面张力的特殊力学形式,在拉格朗日框架下采用无网格移动粒子半隐式法并基于表面自由能表面张力模型,建立了单液膜双气液界面表面张力模型,从而实现了单液膜气泡振荡变形过程中的复杂界面计算和捕捉。在此基础上对2个单液膜气泡的聚并和连接过程进行了模拟分析,获得了典型的流动现象和液膜变形特征与规律,发现减小表面张力系数或增大黏性系数均会减弱气泡变形过程中表面张力项的变形主导作用。为此,提出了凹点切线法用于计算连接型气泡的液膜夹角,明晰了连接型气泡的形状。计算结果可为工业消泡技术提供一定的理论依据。

关键词: 移动粒子半隐式法;表面张力;单液膜气泡;气泡聚并;气泡连接

中图分类号: V211.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)12-0156-07

Numerical Simulation of Moving Particle Semi-Implicit Method for Single-Film Bubbles Coalescence and Connection

NI Ni, SUN Zhongguo, CHEN Xiao, XI Guang

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, 710049, Xi'an)

Abstract: The mesh-less moving particle semi-implicit method is employed within the Lagrangian framework to investigate the special geometry of the single film bubble with gas being shrouded by a layer of liquid film, and its special dynamic characteristic that surface tension acts both on the inside and outside interfaces. A surface tension model of the single-film-double-interfaces is established based on the surface tension model of surface free energies, and the complex interface movement in the oscillation process of the single-film bubble is calculated and captured. Moreover, the coalescence and connection process of two single-film bubbles are simulated and analyzed, and the typical flow phenomena and deformation characteristics of the liquid film are obtained. Results show that the leading role of the surface tension in the bubble deforming process reduces when either the surface tension coefficient decreases or the fluid viscosity increases. Furthermore, a concave tangent method is proposed to calculate the angle of the liquid film of the connected bubbles, which helps to describe the shape of connected bubble, quantitatively. These results provide some theoretical supports to the industrial froth breaking.

Keywords: moving particles semi-implicit method; surface tension; sing-film bubble; bubble coalescence; bubble connection

收稿日期: 2017-06-11。 作者简介: 倪妮(1992—),女,硕士生;孙中国(通信作者),男,副教授。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51576154)。

网络出版时间: 2017-09-22

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20170922.1743.010.html>

单液膜气泡是由一层很薄的液膜在表面张力作用下包裹一定量气体形成的,其内外壁面均存在气液表面张力作用,力学作用和几何结构均比较特殊。气泡聚并行为是指两个气泡相互接触后合二为一的过程。气泡连接是指两个气泡相互接触且含有一层液膜的稳定存在形式。

理论分析方面,Ramakrishnan 等提出了气泡形成的两阶段模型^[1];杨林涛等根据表面吸附和两相流体力学理论,对液体中气泡体积进行理论分析后得出了液体中气泡体积的计算方程,并计算出水中气泡的大小^[2]。实验研究方面,张建生等用高速摄影技术对水中气泡运动规律进行了详细研究^[3];Chan 等使用原子力显微镜、光干涉条纹图像及测量聚并时间 3 种方式对液滴和气泡的排液过程及依赖于时间的相互作用关系进行了研究^[4];顾汉洋等利用双平行探针技术和摄像方法对水平直管内气液两相流中单气泡的形态特征进行了研究^[5]。数值模拟方面,常用方法有 Front-tracking^[6]、VOF^[7]、Level-set^[8]和 LBM^[9]等。Li 等采用 VOF 方法研究了表面张力系数和黏性系数对液体中上升气泡运动情况的影响^[10];张淑君等采用 VOF 方法中的界面重构方法模拟研究了液体中不同放置方式气泡之间的相互作用^[11];Sussman 等将 VOF 与 Level-set 方法相结合,模拟了无黏气泡的上升和球形气泡在近壁处的破裂^[12];Amaya 采用 LBM 方法研究了单气泡或者少量气泡^[14]的变形行为。

上述研究都是基于单气液界面的表面张力模型对液体中气泡的形态进行分析,关于空气中单液膜气泡,即液膜双气液界面在表面张力作用下的变形行为涉及较少,这是因为单液膜气泡的聚并和连接等行为过程伴随着剧烈和复杂的相界面变化,对数值方法在相界面捕捉和计算稳定性等方面要求较高。移动粒子半隐式法(MPS)^[15]在处理计算区域存在巨大变形的流动问题时具有较大优势,迄今已在诸多工程和科学研究中得到了广泛应用,例如 Sun 等编程实现了二维情况下水中气泡自由上升运动的数值模拟^[16-17]。

本文基于 MPS 方法,对二维空气中单液膜气泡在表面张力作用下的振荡变形、聚并及连接过程进行数值模拟和研究。

1 数值方法

1.1 移动粒子半隐式法

移动粒子半隐式法^[15]的基本思想是在求解区

域内部及其边界上布置一系列离散的粒子来代表所要研究的宏观流体,采用时间层推进法获得整个流场的流动信息。在拉格朗日坐标系下表征流场的流动信息,不可压缩流体的控制方程为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (2)$$

式中: ρ 为流体密度; u_i 为速度; p 为流体压力; τ_{ij} 为剪切应力; f_i 为作用在单位质量上的外力。

MPS 方法用核函数 w 形成的粒子作用模型来离散控制方程,本文所使用的核函数为

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1, & r < r_e \\ 0, & r \geq r_e \end{cases} \quad (3)$$

式中: $r = |r_j - r_i|$ 为 2 个粒子间的距离; r_e 为影响域,取值为 $3.1l_0$, l_0 为粒子间的初始距离。控制方程中的梯度算子和拉普拉斯算子可以基于核函数进行离散。

1.2 表面张力模型

采用表面自由能模型^[18]来实现对单液膜气泡在表面张力作用下变形过程的数值模拟,其基本思想是通过构建粒子间的相互作用力来模拟粒子所受到的表面张力。定义 2 个 MPS 粒子之间的势能为 $P(r)$,则表面张力为

$$f_i = \frac{\partial P(r)}{\partial r} \mathbf{n} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{n}$ 为 2 个粒子之间的单位方向矢量。 r 小于临界值时,粒子间为斥力; r 大于临界值时,粒子间为引力。粒子间势能公式为

$$P(r) = \begin{cases} \frac{C}{3} \left(r - \frac{3}{2} r_{\min} + \frac{1}{2} r_e \right) (r - r_e)^2, & r < r_e \\ 0, & r \geq r_e \end{cases} \quad (5)$$

式中: $r_{\min}$ 为斥力、引力的分界位置,即表面自由能的极值点,取值为 $1.5 l_0$; C 为修正系数,可根据流体的物性求得^[18]。

由式(4)和式(5)得表面张力计算公式为

$$f_i = \begin{cases} C(r - r_e)(r - r_{\min}), & r < r_e \\ 0, & r \geq r_e \end{cases} \quad (6)$$

1.3 单液膜双气液界面表面张力模型

针对单液膜气泡的特点,假设气泡外部空气压力恒定为 0,模拟时不使用流体粒子模拟外部大气,忽略其对液膜流动的影响;假设气泡内部空气压力均匀恒定,采用不可压缩流体粒子来填充代替,其物

性参数为空气。两部分气体中间的液膜采用黏性流体粒子来离散计算,参数设置为具有一定表面张力的液体,具体实施方案如图 1 所示。

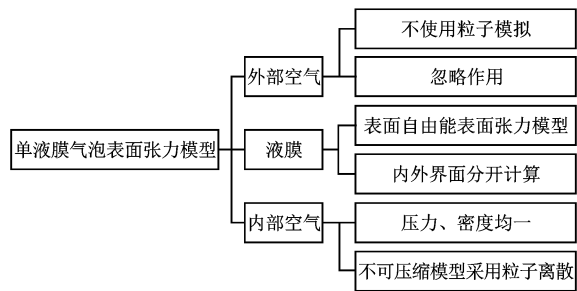


图 1 单液膜气泡表面张力计算的实施方案

假设粒子总数为 N , i 为粒子编号, $i=1\sim m$ 时为液膜粒子, $i=(m+1)\sim N$ 时为内部空气粒子,则相对应的密度 $\rho(i)$ 和运动黏性系数 $\nu(i)$ 的表达式分别为

$$\rho(i)=\begin{cases}\rho_l, & i\leqslant m \\ \rho_g, & m< i\leqslant N\end{cases}\quad (7)$$

$$\nu(i)=\begin{cases}\nu_l, & i\leqslant m \\ \nu_g, & m< i\leqslant N\end{cases}\quad (8)$$

对于液膜自由面上的表面粒子,当 $r<3.1\ l_0$ 时,其表面张力计算公式为

$$f_{i(i=1,2,\cdots,m)}=C(r-r_e)(r-r_{\min})\quad (9)$$

对于黏性项即拉普拉斯项,其计算公式为

$$\langle \nabla^2 p \rangle_{i(i=1,2,\cdots,N)}=\frac{2d}{\lambda n_0}\sum_{j\neq i}(p_j-p_i)w(|r_j-r_i|)\quad (10)$$

1.4 数值方法验证

表面张力总是使液体表面具有收缩至表面积最小的趋势。本文选取典型验证算例之一——二维方形气泡在表面张力作用下收缩振荡、在黏性耗散作用下最终稳定在圆形状态来进行验证,计算参数见表 1,初始粒子布置如图 2 所示,粒子间距为 0.3 mm,气泡边长为 18 mm,其中内部黑色部分为气体,不同深浅粒子代表液膜(由外到内),总厚度为 0.9 mm。计算时间步长取为 $\Delta t=10\ \mu\text{s}$ 。由图 2 可知, $t=0\sim 0.02\ \text{s}$ 时,方形气泡 4 个角逐渐收缩, $t=0.02\ \text{s}$ 时近似收缩为菱形,之后再由菱形逐步变为

表 1 方形气泡的粒子物性参数

物质	密度/ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	运动黏性系数 $\nu/\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	表面张力系数 $\sigma/\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$
水	1 000.00	1.01×10^{-6}	7.25×10^{-2}
空气	1.50	1.19×10^{-5}	

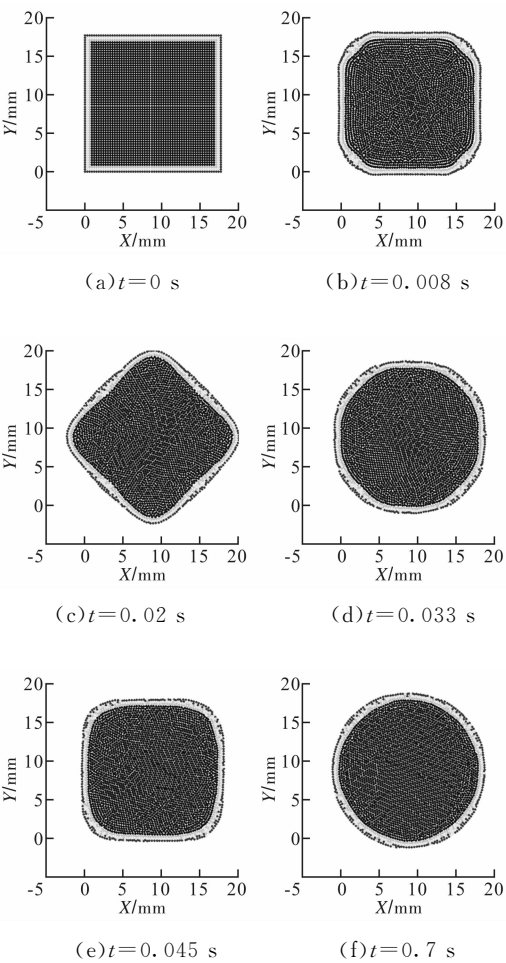


图 2 方形气泡振荡时间序列图

圆形达到稳定状态。

图 3 给出了气泡平均压力随时间的变化。内层液膜的平均压力和内部气体粒子的平均压力在不同时刻其大小和变化频率几乎一致,约为 13 Pa。中间液膜的平均压力大于内层液膜和气体粒子的平均压力,约为 203 Pa。外层液膜在程序中被判断为表面粒子,其平均压力为 0(大气表压)。上述气泡变形过程及压力计算结果均符合空气中单液膜气泡的

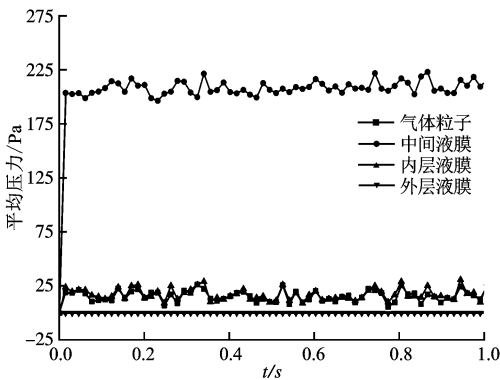


图 3 气泡平均压力随时间的变化

物理特征,验证了本文单液膜气泡计算模型的有效性。

2 数值计算及结果分析

2.1 二维等尺度单液膜气泡聚并过程模拟

图 4 给出了二维等尺度气泡聚并过程时序图。初始位置如图 4a 所示,粒子间距为 0.30 mm,气泡半径为 6.00 mm,气泡质心间距为 12.30 mm,液膜厚度为 0.90 mm,时间步长为 $\Delta t=10\ \mu\text{s}$,物性参数见表 2。为了方便观察气泡液膜变化过程,图 4 只显示液膜粒子分布。 $t=0.015\ \text{s}$ 时 2 个气泡开始相互靠近并接触,在液膜外侧夹角处形成较大曲率,使得表面迅速变形融合,所含有液膜不断地排液减薄,当减薄到某临界厚度时发生破裂; $t=0.07\ \text{s}$ 时气泡内气体发生融合; $t=0.12\ \text{s}$ 时外部液膜逐渐开始收缩均匀化,在表面张力的作用下向中心点收缩; $t=0.66\ \text{s}$ 时 2 个气泡聚并为一个圆形大气泡。

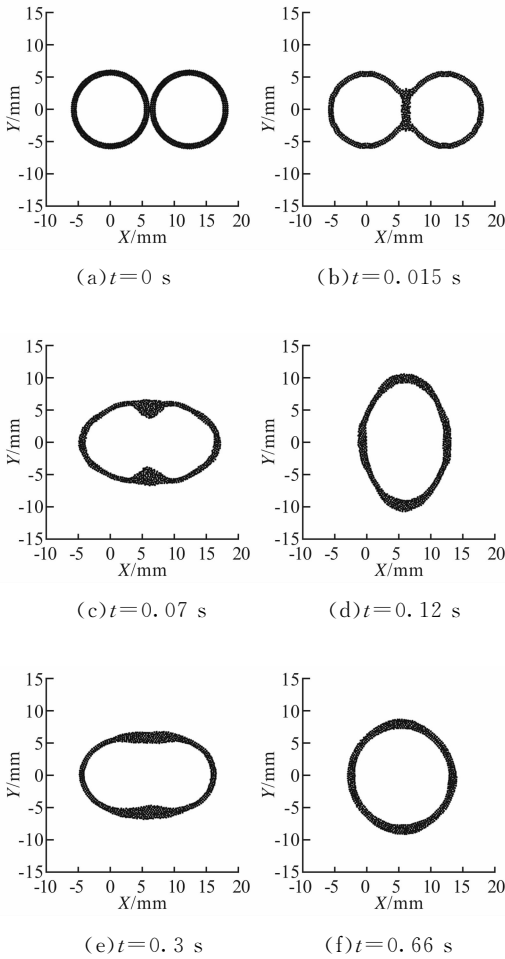


图 4 二维等尺度气泡聚并过程时序图

图 5 给出了二维等尺度气泡聚并过程振荡幅值随时间的变化。初始阶段 2 个气泡靠近接触,水平

表 2 离散粒子物性参数

物质	密度/ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	运动黏性系数 $\nu/\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	表面张力系数 $\sigma/\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$
液体 1	1 000.00	0.60×10^{-6}	7.50×10^{-2}
空气	1.50	1.19×10^{-5}	

方向振荡幅值减小,竖直方向气泡尺寸增大。当竖直方向增大到极值时,表面张力驱使气泡逐渐向中心收缩,水平方向振荡幅值逐渐增大。如此往复振荡变形,振荡幅值随黏性耗散呈衰减趋势,直至稳定。

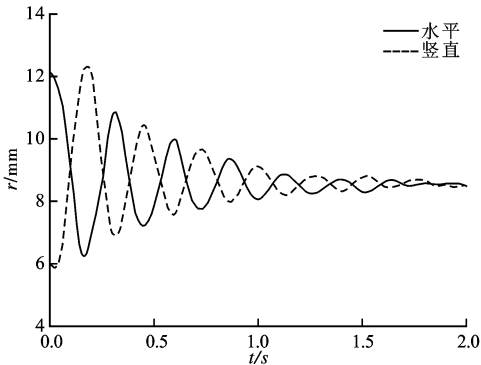


图 5 二维等尺度气泡聚并过程振荡幅值随时间的变化

2.2 二维非等尺度单液膜气泡聚并过程模拟

二维非等尺度气泡聚并过程时序图如图 6 所示。初始布置如图 6a 所示,粒子间距为 0.30 mm,时间步长取为 $\Delta t=10\ \mu\text{s}$ 。气泡半径分别为 9.00 mm 和 3.00 mm,气泡质心间距为 12.66 mm,物性参数见表 2。 $t=0.02\ \text{s}$ 时 2 个气泡刚开始相互靠近接触,相互靠近的边缘部分比较尖; $t=0.05\ \text{s}$ 时含有一层液膜; $t=0.08\ \text{s}$ 左右时所含有液膜不断地排液、减薄,当液膜减薄到某一临界厚度时气泡融合; $t=0.22\ \text{s}$ 时外部液膜逐渐开始收缩均匀化; $t=0.66\ \text{s}$ 时聚并为一个圆形大气泡。

2.3 表面张力与黏性对单液膜气泡变形的影响

单液膜气泡变形过程中忽略重力,仅受表面张力和黏性力作用,本节研究运动黏性系数和表面张力系数对气泡变形过程的影响规律。

以图 4 为基础算例,不同时刻下无量纲数 δ (表面张力项/黏性项)随运动黏性系数的变化如图 7 所示。表面张力系数为 0.025 N/m,运动黏性系数由 $0.25\times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$ 增大至 $3.50\times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$,3 个典型时刻下曲线基本趋势一致。以 $t=0.015\ \text{s}$ 时刻为例,随着黏性系数增大, δ 减小,即表面张力的主导作用越来越弱。其次,在相同黏性系数下,随着时间增加,表面张力项的主导作用越来越强,这是由于黏

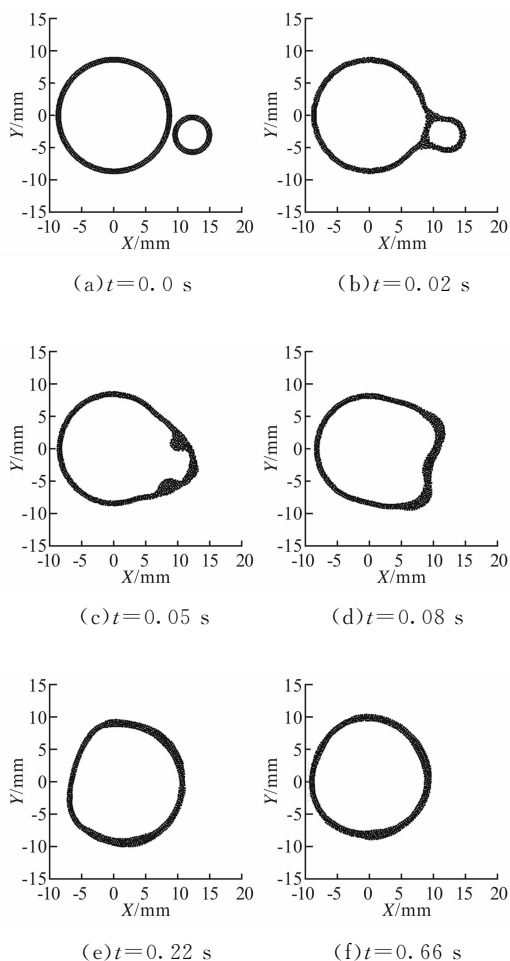
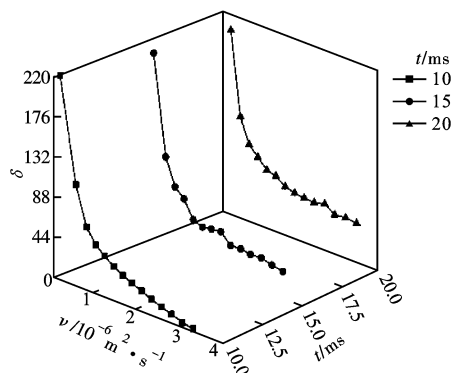


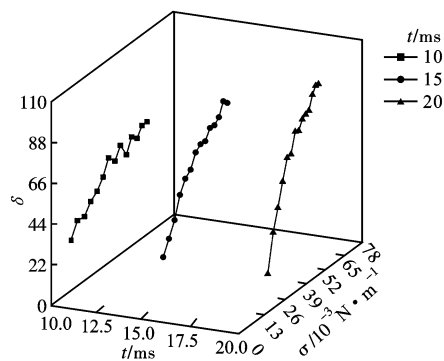
图6 二维非等尺度气泡聚并过程时序图

性耗散导致平均速度梯度降低,黏性项作用逐渐减弱,因此表面张力项作用呈增大趋势。总体来看,整个曲线呈非线性趋势下降。

图7 不同时刻下 δ 随运动黏性系数的变化

不同时刻下 δ 随表面张力系数的变化如图8所示。运动黏性系数为 $1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$,表面张力系数取值由 0.005 增大至 0.07 。3种典型时刻下,曲线基本趋势一致。以 $t=0.015 \text{ s}$ 为例,随着表面张力系数增大,表面张力增大, δ 增大,即表面张力项

的主导作用增强,气泡变形能力较强。其次,在同一表面张力系数下,随着时间的增加,表面张力项的主导作用也越来越强,这与图7的分析结果一致。

图8 不同时刻下 δ 随表面张力系数的变化

2.4 二维等尺度单液膜气泡连接过程模拟

由2.3节中的分析可知,液膜表面张力系数减小或运动黏性系数增大时,表面张力主导的变形作用逐渐减弱。肥皂液表面张力系数比水小(一般约为 $3.2 \times 10^{-2} \text{ N/m}$),黏性系数较大^[19],较容易出现气泡间相连接的稳定形状而不发生融合。本文参考肥皂液物性参数模拟形成连接型气泡。

图9给出了二维等尺度气泡连接过程时序图。初始位置如图9a所示,粒子间距为 0.30 mm ,时间步长为 $10 \mu\text{s}$ 。气泡半径为 9.00 mm ,气泡质心间距为 18.30 mm ,物性参数设置见表3。由图9可知, $t=0.012 \text{ s}$ 时2个气泡刚开始相互靠近并接触,在液膜夹角处形成较大曲率,液膜迅速融合,气泡间

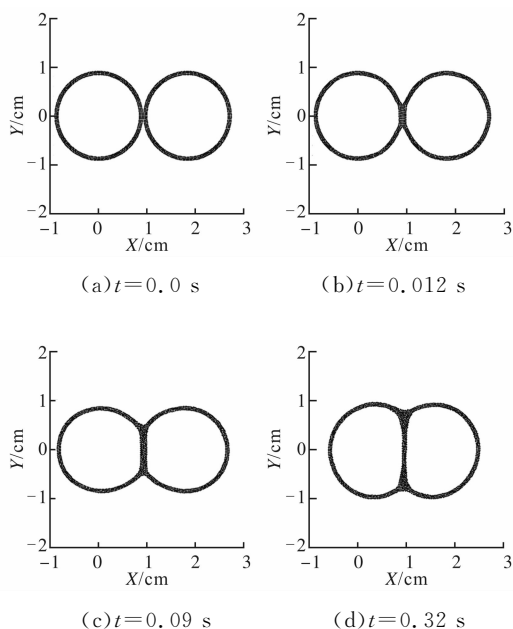


图9 二维等尺度气泡连接过程时序图

形成液膜,其长度不断增加; $t=0.32\text{ s}$ 时液膜长度保持不变,2个气泡形成稳定的连接型气泡,中间液膜稳定且光滑。

表 3 粒子物性参数

物质	密度/ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	运动黏性系数 $\nu/\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	表面张力系数 $\sigma/\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$
液体 2	1 000.00	1.5×10^{-5}	3.2×10^{-2}
空气	1.50	1.19×10^{-5}	

为了定量计算稳定的连接型气泡液膜夹角,本文提出了凹点切线法,如图 10 所示。该方法计算时忽略液膜厚度,通过求得中间液膜端点外两侧液膜切线的斜率,得到气泡液膜的夹角。以计算液膜 A 点夹角为例,具体过程为:①确定中间液膜 A 端外侧的最低点(凹点);②以凹点为圆心、 $r=5l_0$ 为半径画圆(虚线圆框),对包括在圆域内凹点两侧的表面粒子分别计算与 A 粒子的斜率;③将计算得到的左侧斜率和右侧斜率组合得到总夹角。通过该方法计算,得到图 9 算例中 A 点的液膜间夹角为 139.3° ,B 点的为 142.4° 。

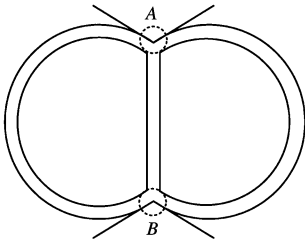


图 10 采用凹点切线法计算液膜夹角示意图

2.5 二维非等尺度单液膜气泡连接过程模拟

二维非等尺度气泡连接过程的时序图如图 11 所示。初始位置如图 11a 所示,粒子间距为 0.30 mm ,时间步长为 $10\text{ }\mu\text{s}$ 。大气泡半径为 9.00 mm ,小气泡半径为 6.00 mm ,气泡质心间距为 15.30 mm ,物性参数见表 3。气泡中间液膜是向较大气泡方向凸起的一个曲面,这是由于小气泡曲率大于大气泡,小气泡内受到的附加压力也大于大气泡。

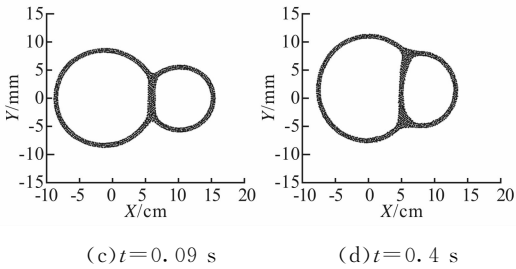
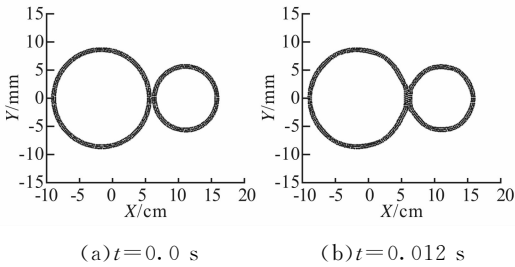


图 11 二维非等尺度气泡连接过程时序图

3 结 论

本文在拉格朗日框架下采用移动粒子半隐式法,基于表面自由能表面张力模型建立了单液膜双气液界面表面张力模型,模拟并分析了气泡的变形、聚并和连接等典型流动行为,得到以下结论。

(1)基于 MPS 法提出了单液膜双气液界面表面张力模型,实现了二维单个方形气泡在表面张力作用下振荡变圆过程的数值模拟,获得气泡变形过程中的液膜变形细节和压力分布特征,可为研究单液膜气泡变形行为提供一种有效的数值研究方法。

(2)通过模拟二维等尺度和非等尺度单液膜气泡的典型聚并过程,得到 2 个气泡靠近接触,含有一层液膜,液膜逐步排液减薄、破裂和整形聚并为一个大气泡的基本物理过程。

(3)研究了基本物性参数对流动和变形的影响,发现减小表面张力系数或增大黏性系数均会减弱气泡变形过程中表面张力项的变形主导作用。随着模拟的进行,由于黏性耗散表面张力项的主导作用增强,为工业消泡技术提供理论依据。

(4)模拟了二维等尺度和非等尺度单液膜气泡的连接过程,提出了计算连接型气泡液膜夹角的凹点切线法,量化了连接型气泡形状的描述,为机理研究提供理论基础。

参考文献:

[1] RAMAKRISHNAN S, KUMAR R, KULLOOR N R. Studies in bubble formation: I Bubble formation under constant flow conditions [J]. Chemical Engineering Science, 1969, 24(4): 731-747.

[2] 杨林涛,吕建强,孙粤红,等. 渗漏过程中气泡大小的理论分析研究 [J]. 机械设计与制造工程, 2010, 39(3): 78-79.

YANG Lintao, LV Jianqiang, SUN Yuehong, et al. Theoretical analysis of leakage during the bubble size [J]. Machine Design and Manufacturing Engineering,

- 2010, 39(3): 78-79.
- [3] 张建生, 吕青, 孙传东, 等. 高速摄影技术对水中气泡运动规律的研究 [J]. 光子学报, 2000, 29(10): 952-955.
ZHANG Jiansheng, LV Qing, SUN Chuandong, et al. High speed photography to motion of bubbles in water [J]. Photonics Journal, 2000, 29(10): 952-955.
- [4] CHAN D Y C, KLASEBOER E, MANICA R. Film drainage and coalescence between deformable drops and bubbles [J]. Soft Matter, 2011, 7(6): 2235-2264.
- [5] 顾汉洋, 郭烈锦, 张西民, 等. 水平管内气液两相流中单气泡形态特征实验研究 [J]. 工程热物理学报, 2006, 27(3): 433-436.
GU Hanyang, GUO Liejin, ZHANG Ximin, et al. Single bubbles in gas-liquid two-phase flow in a horizontal tube shape characteristics [J]. Journal of Engineering Physics, 2006, 27(3): 433-436.
- [6] LU Huilin, SHEN Zhiheng, DING Jianming, et al. Numerical simulation of bubble and particles motions in a bubbling fluidized bed using direct simulation Monte-Carlo method [J]. Powder Technology, 2006, 169(3): 159-171.
- [7] OLMOS E, GENTRIC C, VIAL C, et al. Numerical simulation of multiphase flow in bubble column reactors: Influence of bubble coalescence and break-up [J]. Chemical Engineering Science, 2001, 56(21/22): 6359-6365.
- [8] 刘红, 靳茂昭, 李科, 等. 液态金属熔池中气泡-液体两相湍流的数值模拟研究 [J]. 计算力学学报, 2007, 24(5): 669-673.
LIU Hong, XIE Maozhao, LI Ke, et al. Numerical simulation of two phase turbulent bubbling flow induced by gas injecting into metal melt [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2007, 24(5): 669-673.
- [9] SUNKORN R, DERKSEN J J, KHINAST J G. Modeling of turbulent gas-liquid bubbly flows using stochastic Lagrangian model and lattice-Boltzmann scheme [J]. Chemical Engineering Science, 2011, 66(12): 2745-2757.
- [10] CHEN Li, GARIMELLA S V, REIZES J A, et al. The development of a bubble rising in a viscous liquid [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1999, 387(2): 61-96.
- [11] 张淑君, 吴锤结. 气泡之间相互作用的数值模拟 [J]. 水动力学研究与进展, 2008, 23(6): 89-94.
ZHANG Shujun, WU Chuijie. Numerical simulation of the interaction between bubbles [J]. Hydrodynamic Research and Progress, 2008, 23(6): 89-94.
- [12] SUSSMAN M, ALMGREN A S, BELL J B, et al. An adaptive level set approach for incompressible two-phase flows [J]. Office of Scientific & Technical Information Technical Reports, 1999, 148(1): 81-124.
- [13] AMAYA-BOWER L, LEE T. Single bubble rising dynamics for moderate Reynolds number using lattice Boltzmann method [J]. Computers & Fluids, 2010, 39(7): 1191-1207.
- [14] YU Zhao, YANG Hui, FAN Liang-Shih. Numerical simulation of bubble interactions using an adaptive lattice Boltzmann method [J]. Chemical Engineering Science, 2011, 66(14): 3441-3451.
- [15] KOSHIZUKA S, OKA Y. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid [J]. Nuclear Science & Engineering, 1996, 123(3): 421-434.
- [16] SUN Zhongguo, XI Guang, CHEN Xi. A numerical study of stir mixing of liquids with particle method [J]. Chemical Engineering Science, 2009, 64(2): 341-350.
- [17] SUN Zhongguo, XI Guang, CHEN Xi. Mechanism study of deformation and mass transfer for binary droplet collisions with particle method [J]. Physics of Fluids, 2009, 21(3): 4008.
- [18] KONDO M, KOSHIZUKA S, SUZUKI K, et al. Surface tension model using inter-particle force in particle method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 81(4): 82.
- [19] CYBAHOB A Y, 杨廷锴. 肥皂溶液的物理化学性质 [J]. 日用化学品科学, 1985(4): 31-32.
CYBAHOB A Y, YANG Tingkai. Physical and chemical properties of the soap solution [J]. Daily Chemical Science, 1985(4): 31-32.

(编辑 武红江 苗凌)